www.tunisie-etudes.info

Ce document a été téléchargé depuis
www.tunisie-etudes.info

Des documents gratuits, devoirs, examens, cours, exercices, corrigés... Ainsi que toute une rubrique pour vous aider à trouver un emploi sans oublier les avis de concours en direct

Notre page Twitter :
http://www.twitter.com/TunisieEtudes
Notre page FaceBook :
http://www.facebook.com/TunisieEtudes



Merci d'avoir choisi www.tunisie-etudes.info
Bonne lecture et bon travail

MATHÉMATIQUES

DEUXIÈME COMPOSITION

(toutes options : voir variante sur IV)

DURÉE : 3 heures

Dans l'espace $\mathbb{R}[X]$ des polynômes à une indéterminée et à coefficients réels, $\mathbb{R}_n[X]$ désigne le sous-espace vectoriel formé par les polynômes dont le degré est au plus égal à n. Le degré du polynôme nul est, par convention, $\deg(0) = -\infty$.

e désigne l'application identique de $\mathbb{R}[X]$ dans lui-même.

PRÉLIMINAIRE

Pour $n \in \mathbb{N}$, soit $(A_0, A_1, \ldots A_n)$ une famille d'éléments de $\mathbb{R}[X]$ tels que, pour tout $i \in \{0 \ldots n\}$, $\deg(A_i) = i$.

Prouver que $(A_0, A_1, \ldots, A_n)$ est une base de $\mathbb{R}_n[X]$.

PREMIÈRE PARTIE

On désigne par t l'application de $\mathbb{R}[X]$ dans lui-même, définie par : $\forall P, P \in \mathbb{R}[X]$, $[t(P)](X) = P(X+1)$.

On pose $\delta = t - e$, de sorte que pour tout P : $[\delta(P)](X) = P(X+1) - P(X)$.

1. Vérifier que δ est linéaire.

   Pour tout n, calculer $\delta(X^n)$ et en déduire, pour un polynôme P quelconque, $\deg[\delta(P)]$ en fonction de $\deg(P)$.

2. Prouver que $\operatorname{Ker}\delta = \mathbb{R}_0[X]$.

3. δ_n désignant la restriction de δ à $\mathbb{R}_n[X]$, montrer que, pour $n \geqslant 1$:

$$\operatorname{Im}\delta_n = \mathbb{R}_{n-1}[X].$$

4. En déduire que, pour tout polynôme B appartenant à $\mathbb{R}[X]$, il existe un unique polynôme P satisfaisant aux conditions :

$$\begin{cases} \delta(P) = B \\ P(0) = 0 \end{cases}$$

   Que vaut $\deg(P)$ en fonction de $\deg(B)$?

DEUXIÈME PARTIE

Soit $k \in \mathbb{N}^*$.

1. Prouver l'existence et l'unicité d'un polynôme G_k, $G_k \in \mathbb{R}[X]$, tel que, pour tout entier p, $p \in \mathbb{N}^*$, l'on ait :

$$G_k(p+1) = 1^k + 2^k + \ldots + p^k = \sum_{i=1}^{i=p} i^k.$$

   Quel est le degré de G_k ?
   Prouver que $G_k(X)$ est divisible par $X(X-1)$.
   Que vaut $G_k(-p)$, pour $p \in \mathbb{N}^*$?

2. Soit x réel quelconque. On définit la fonction numérique φ_x par : $\forall t, t \in \mathbb{R}^* : \varphi_x(t) = \dfrac{\exp(xt) - 1}{\exp(t) - 1}$.

   Étudier le prolongement en $t = 0$ de φ_x, du point de vue de la continuité et de la dérivabilité.

Tournez la page S.V.P.

3. On admet que φ_x est développable en série entière autour de $t = 0$, avec un rayon de convergence R, $R > 0$.
En développant le produit des deux séries entières :

$$\begin{cases} t \to \varphi_x(t) \\ t \to e^t - 1 \end{cases},$$

prouver, par récurrence sur l'entier k, que si le développement de φ_x s'écrit :

$$\forall t, |t| < R : \varphi_x(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\gamma_k(x)}{k!} t^k,$$

alors $\gamma_k(x)$ est une fonction polynomiale de degré $k + 1$ de la variable x.

4. Calculer $\gamma_0, \gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$.

5. Prouver que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\gamma_k(x) = G_k(x)$ [on étudiera la différence $\varphi_{x+1}(t) - \varphi_x(t)$].

TROISIÈME PARTIE

On définit une suite de polynômes $\{A_n, n \in \mathbb{N}\}$ par :

$$A_0(X) = 1$$
$$A_1(X) = X$$
$$\dots$$
$$\forall n \geqslant 1, A_n(X) = X(X-1)(X-2)\dots(X-n+1) = \prod_{k=0}^{n-1} (X-k).$$

Le développement de A_n selon les puissances de X est noté :

$$A_n(X) = a_{n,0} + a_{n,1} X + \dots + a_{n,n} X^n = \sum_{i=0}^{n} a_{n,i} X^i.$$

1. Calculer, pour tout n, $a_{n,0}$ et $a_{n,n}$.

2. Prouver que, pour tout n ($n \geqslant 1$) et tout k ($1 \leqslant k \leqslant n$), l'on a : $a_{n+1,k} = a_{n,k-1} - n a_{n,k}$.

3. Prouver l'existence d'un polynôme de degré 2, que l'on notera Q_1, tel que :

$$\forall n, n \geqslant 1, a_{n,n-1} = Q_1(n).$$

4. Prouver, par récurrence sur p, l'existence pour $p \geqslant 1$ d'un polynôme Q_p, de degré $2p$, tel que :

$$\forall n, n \geqslant p, a_{n,n-p} = Q_p(n).$$

5. Donner une factorisation de Q_2.

QUATRIÈME PARTIE (option generale seule)

1. Soit $\mathscr{B} = \left\{ \frac{1}{k!} A_k ;\ k = 0 \dots n \right\}$,

Prouver que $\mathscr{B}$ est une base de $\mathbb{R}_n[X]$.

Expliciter la matrice de la restriction δ_n de δ à $\mathbb{R}_n[X]$, relativement à la base $\mathscr{B}$.

Déterminer les valeurs propres et les sous-espaces propres de δ_n. δ_n est-elle diagonalisable ?

2. Soit $P \in \mathbb{R}_n[X]$.

Exprimer les coordonnées de P relativement à la base $\mathscr{B}$ à l'aide des $(\delta^k P)(0)$.
En déduire que, si pour tout entier $m \in \mathbb{Z}$, l'on a $P(m) \in \mathbb{Z}$, alors les coordonnées de P relativement à $\mathscr{B}$ sont dans $\mathbb{Z}$.

3. Vice versa, prouver que si P a toutes ses coordonnées entières relativement à $\mathscr{B}$, alors : $\{m \in \mathbb{Z}\} \Rightarrow \{P(m) \in \mathbb{Z}\}$.

www.tunisie-etudes.info

Ce document a été téléchargé depuis
www.tunisie-etudes.info

Des documents gratuits, devoirs, examens, cours, exercices, corrigés... Ainsi que toute une rubrique pour vous aider à trouver un emploi sans oublier les avis de concours en direct

Notre page Twitter :
http://www.twitter.com/TunisieEtudes
Notre page FaceBook :
http://www.facebook.com/TunisieEtudes



Merci d'avoir choisi www.tunisie-etudes.info
Bonne lecture et bon travail